



# 布朗运动在银行理财产品 风险度量中的应用

## Applying Brownian Motion in Risk Measurement of Bank Wealth Management Products

许辉 王环宇

**摘要：**银行理财产品的投资收益与风险管理，关系到千家万户的切身利益，研究分析银行理财产品风险收益特征的必要性不断提高，本文使用布朗运动刻画银行理财产品底层资产的收益和波动，并据此测算了银行理财产品的收益分布；同时，针对银行理财产品的风险分布特征，在理财产品的销售发行、投资管理、风险控制等方面提出了建议。

**关键词：**银行理财产品 布朗运动 收益分布

**Abstract:** The investment returns and risk management of bank wealth management products are of vital interest to households across the country. This makes the study and analysis of risk-return characteristics of bank wealth management products increasingly important. This paper uses Brownian motion to portray the returns and fluctuations of the underlying assets of bank wealth management products and measure the distribution of returns on these products. It also makes recommendations on sales, investment management, and risk control measures with respect to the risk distribution characteristics of bank wealth management products.

**Keywords:** Bank Wealth Management Products, Brownian Motion, Return Distribution

许辉、王环宇，工银理财有限责任公司投资经理。



## 引言

2022年，银行理财迅速发展，严格落实监管要求，贯彻落实新发展理念，不断强化金融服务、养老保障功能，增强服务实体经济水平，满足居民财富管理需求，整体呈现稳中向好态势。银行业理财登记托管中心发布的《中国银行业理财市场报告（2022年上）》显示，2022年上半年理财产品新发1.52万只，累计募集资金47.92万亿元，截至2022年6月底，理财产品存续3.56万只，存续余额29.15万亿元，同比增长12.98%，其中净值型理财产品存续规模27.72万亿元，占比95.09%，较2021年同期增加16.06个百分点；同时，为贯彻落实党中央、国务院关于发展多层次、多支柱养老保险体系的重要决策部署，已有27只养老理财产品顺利发售，23.1万名投资者累计认购超600亿元。与此同时，银行理财产品通过投资债券、非标准化债权、未

上市企业股权等资产，支持实体经济资金规模约25万亿元，多途径支持实体经济多样化融资需求，促进债券和股票资本市场资源向高端制造、民生医疗、能源科技等领域配置。

银行理财坚持长期投资和价值投资理念，发挥了资本市场稳定器和压舱石的作用。为实现理财产品的稳健收益，贯彻“为民理财”的服务宗旨，体现金融的人民性，本文使用布朗运动刻画银行理财产品底层资产的收益和波动，运用概率模型测量分析理财产品的投资组合收益分布，并考察其背后的金融变量，针对理财产品的销售发行、投资管理、风险控制等方面提出建议。

## 布朗运动在金融学中的应用

将布朗运动<sup>①</sup>与股票价格行为联系在一起，进而建立起的维纳过程<sup>②</sup>的数学模

① 布朗运动是指悬浮在液体或气体中的微粒所做的永不停息的无规则运动。1827年，在植物学家罗伯特·布朗利用一般的显微镜观察悬浮于水中由花粉所迸裂出的微粒时，发现微粒会呈现不规则状的运动，因而命名为布朗运动。

② 相比物理学，数学上对于布朗运动的描述发展得较为缓慢。严谨的数学定义并描述布朗运动，由若波特·维纳在1918年提出，因此布朗运动，又称为维纳过程。

在数学中，如果一个定义在非负实数（时域） $t$ 上的连续随机过程 $\{B(t), t \geq 0\}$ ，并满足以下性质：

对于任意的 $t > s$ ， $B(t) - B(s)$ 独立于之前的过程 $B(u)$ ， $(0 \leq u \leq s)$ ；

$B(t) - B(s)$ 满足均值为0，方差为 $t - s$ 的正态分布，即 $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$ ；

$B(0) = 0$ ；

则 $B(t)$ 是一个标准的布朗运动。

简单解释，标准布朗运动在 $t = 0$ 时刻的位置是0；而在任意有限时间区间 $\Delta t$ 内，布朗运动的变化满足均值为0，方差为 $\Delta t$ 的正态分布 $N(0, \Delta t)$ ；而独立增量的含义是布朗运动在 $t$ 时刻之后的位置仅仅和 $t$ 时刻所处的位置有关，而与 $t$ 时刻之前的运动轨迹无关。



是现代金融数学中的重要创新。普遍观点认为，股票市场是随机波动的，随机波动是股票市场最基本的特性之一，也是股票市场的常态。

股价行为模型通常使用维纳过程来表达，也就是说股票价格变化具有不变的期望漂移率和方差率。维纳过程说明，只有变量的当前值与未来的走势有关，过去的位置和路径与未来不相关，这种马尔可夫性质与弱市场有效性相契合，即股票价格已经反映了历史上一系列交易价格和交易量中所隐含的信息。但当人们采用分形理论研究金融市场时，发现股价的运行并不遵循布朗运动，而是服从一般形式的几何布朗运动。

假设在任意时刻 $t$ ，股票价格为 $S_t$ ，经过时间无穷小的时间间隔 $\Delta t$ ，资产价格的变动为 $dS_t$ ，则 $dS_t/S_t$ 即为时间间隔

$\Delta t$ 内的收益率，因此有 $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$ ，

因此，股票价格 $B_t$ 的随机微分方程为：

$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ ，其中 $B_t$ 为标准布朗运动。

根据伊藤引理<sup>①</sup>，可以得到 $t$ 时刻的资产价格： $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$ 。

假设 $X$ 为 $T$ 时间内的资产收益率

$X_T = \frac{1}{T}(\ln S_T - \ln S_0)$ ，因为 $\ln S_T - \ln S_0$ 符合均值为 $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ ，方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布，则 $T$ 时间内的符合收益率 $X_T$ 也符合正态分布： $X_T \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T})$ 。

## 构建风险度量模型

### 投资组合的期中风险和期末风险

风险的定义多种多样，在资产管理中，风险的直观定义就是突破某项约束条件的概率大小，引申来看，在资产管理中，最主要的两个风险因子即是投资期末的资产投资收益率表现以及投资管理过程中的回撤止损情况。

针对上述风险，我们定义变量 $X_t$ 代表 $t$ 时刻的资产回报率 $Y_t$ 代表 $t$ 时刻之前的最大亏损：

$$X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right), Y_t = \min_{0 \leq i \leq t} \log\left(\frac{S_i}{S_0}\right)$$

其中， $S_t$ 代表资产在时刻的价格， $X_t$ 为 $S_t$ 的对数收益率， $Y_t$ 为 $t$ 时间内 $X_t$ 的最小值。此即为资产管理中最重要两项约束条件，即期末投资业绩表现和投资期间的最大亏损。

对于一个资产组合 $S_t$ 来说，投资期限为 $0 \leq t \leq T$ ， $X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ ，

① 布朗运动的一般方程为 $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t$ ，一般成为伊藤过程。假设 $f(B_t)$ 为布朗运动 $B_t$ 的连续平滑函数，使用泰勒展开，得到 $df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt$ ，即为伊藤引理的基本形式。

$Y_t = \min_{0 \leq i \leq t} \log(S_i/S_0)$ ，假设  $x$  为投资组合期末的目标收益率， $y$  为投资期间的最大亏损的约束条件，则投资组合面临的主要风险即为  $\psi(x, y) = P(X_T \leq x, \text{ 或者 } Y_T \leq y)$ 。

简化处理， $\psi$  可以分为两部分，分别代表投资期内的风险和投资期末风险。其中投资期内风险是指，不管组合在投资期结束的时候业绩表现是否达标，在到期日  $T$  之前的任一时点，投资组合的回报低于  $y$  的可能性，可以用  $\psi(y, y)$  表示。投资期末风险是指，在投资期内最大亏损幅度都小于  $y$  的前提下，在投资期末，投资组合的业绩表现低于  $x$  的可能性。因此，我们可以将风险模型拆分为两部分：

$$\psi(x, y) = \psi_{IH}(x, y) + \psi_{EH}(x, y),$$

其中， $\psi_{IH}(x, y) = \psi(y, y)$ ，

$\psi_{EH}(x, y) = \psi(x, y) - \psi(y, y)$ 。如果只考虑投资期内风险，即  $\psi_{IH} = 0$ ，则  $x = y$ ；如果只考虑投资期末风险，则  $y \rightarrow \infty$ 。

### 投资组合的收益率分布

假设资产组合的初始净值  $S_0 = 1.0$ ， $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ ，其中  $B_t$  为标准布朗运动， $\mu$  为投资组合资产的预期年化收益率， $\sigma$  为投资组合资产年化波动率。

$$X_t = \log(S_t/S_0), \quad Y_t = \min_{0 \leq i \leq t} \log(S_i/S_0)$$

当时， $y \leq 0$  且  $x \geq y$  时，则投资组合的风险为：

$$\psi(x, y) = N(d_1) + \exp\left(\frac{2y\mu_{log}}{\sigma^2}\right)N(d_2)$$

其中：

$$d_1 = \frac{x - \mu_{log}T}{\sqrt{\sigma^2 T}},$$

$$d_2 = \frac{2y}{\sqrt{\sigma^2 T}} - d_1,$$

$$\mu_{log} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

## 银行理财产品风险度量实证研究

我们以银行理财产品为基础进行实证研究，主要原因：第一，银行理财产品有明确的业绩基准和综合费率，可以作为投资组合的期末业绩目标；第二，尽管银行理财产品已经几乎全部净值化管理，但是客户对于银行理财产品的净值回撤容忍度仍偏低，可以在严格的最大亏损幅度约束下测量投资期内风险。

### 理财产品的收益概率分布

我们假设某银行理财产品数据如下：

第一，某银行2年期PR3级固定收益类理财产品，综合业绩目标为4.0%/年；假设权益类资产的预期收益率为15%/年，波动率为16%/年，投资比例15%，固收类资产预期收益率为3.5%/年，波动率为0%/年，投资比例85%；止损线为净值0.98。则根据上述风险度量模型可以计算得到（图1）：

- (1) 产品期末收益超过综合业绩目

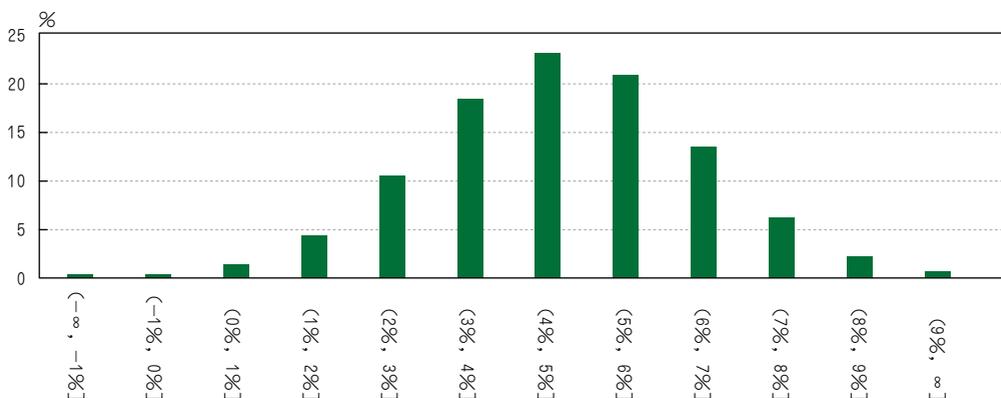


图1 固定收益类产品期末年化收益概率分布

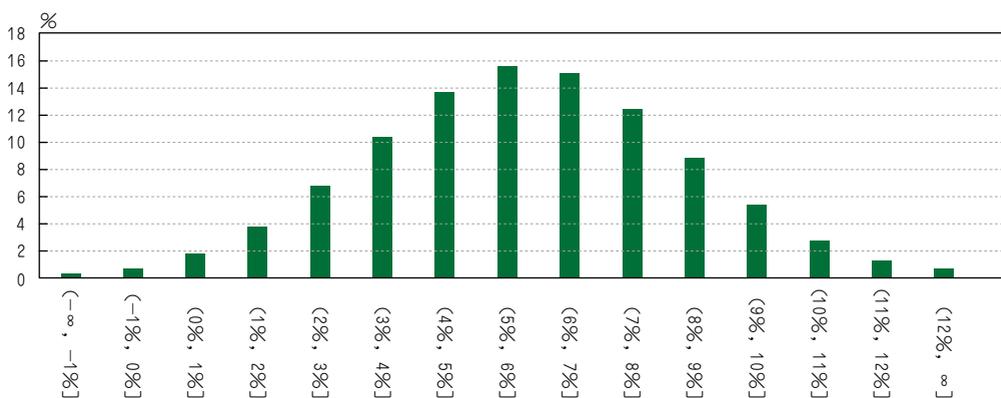


图2 混合类产品期末年化收益概率分布

标的概率为：75.96%；

(2) 产品期末净值高于1.0的概率为：99.72%；

(3) 产品期间最低净值跌破0.98的概率为3.82%。

第二，某银行2.5年期PR3级混合类理财产品，综合业绩目标为4.5%/年；假设权益类资产的预期收益率为15%/年，波动率为16%/年，投资比例25%，固收类资产预期收益率为3.5%/年，波动率为0%/年，投

资比例75%；止损线为净值0.98。则根据上述风险度量模型可以计算得到（图2）：

（1）产品期末收益超过综合业绩目标的概率为：76.10%；

（2）产品期末净值高于1.0的概率为：98.90%；

（3）产品期间最低净值跌破0.98的概率为23.38%。

因此，在基于上述基本假设下：权益类资产配置比例更高的混合类产品回撤的

概率明显高于固定收益类理财产品，但期末投资收益超过业绩目标的概率也更高；总体上基于上述资产配置比例以及各类资产的预期收益和波动率，理财产品期末到期净值低于1.0的概率较低，从到期保证本金安全的角度看，银行理财产品的风险较小，但在投资期间内，有一定的概率会产生浮动亏损。

### 银行理财产品收益率的概率分布敏感性分析

表 1 固定收益类产品权益资产收益率敏感性测试

权益资产收益率	10.0%	12.5%	15.0%	17.5%	20.0%
期末超过业绩基准概率	60.37%	68.58%	75.96%	82.27%	87.43%
期末净值高于1.0概率	99.00%	99.46%	99.72%	99.86%	99.93%
期间净值跌破0.98概率	6.37%	4.94%	3.82%	2.95%	2.27%

表 2 固定收益类产品权益资产波动率敏感性测试

权益资产波动率	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%	20.0%
期末超过业绩基准概率	82.89%	79.11%	75.96%	73.32%	71.10%
期末净值高于1.0概率	99.99%	99.92%	99.72%	99.30%	98.63%
期间净值跌破0.98概率	0.30%	1.40%	3.82%	7.51%	12.35%

表 3 混合类产品权益资产收益率敏感性测试

权益资产收益率	10.0%	12.5%	15.0%	17.5%	20.0%
期末超过业绩基准概率	58.53%	67.81%	76.10%	83.06%	88.56%
期末净值高于1.0概率	96.38%	97.95%	98.90%	99.44%	99.73%
期间净值跌破0.98概率	31.61%	27.22%	23.38%	20.04%	17.16%

表 4 混合类产品权益资产波动率敏感性测试

权益资产波动率	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%	20.0%
期末超过业绩基准概率	83.26%	79.37%	76.10%	73.34%	71.00%
期末净值高于1.0概率	99.89%	99.57%	98.90%	97.88%	96.55%
期间净值跌破0.98概率	7.49%	14.95%	24.38%	31.72%	39.43%



## 银行理财产品的风险度量研究结论与未来展望

### 理财产品的风险度量研究结论

基于几何布朗运动模型假设下，我们构建了投资组合管理的风险度量模型，并根据银行理财产品的基础数据进行了实证分析，分别测算了银行理财产品期末收益率超过业绩基准的概率、期末净值高于1.0的概率以及期间净值跌破0.98的概率，可以基本得出以下结论。

第一，当前银行理财产品的业绩基准定价相对合理，产品期末净值达到业绩基准的概率较高，适宜作为理财产品的投资目标，不代表产品的未来表现和实际收益，不构成对产品收益的承诺。

第二，从保证本金安全的角度看，当前银行理财产品的风险较小，银行理财产品期末净值跌破1.0的概率极低，代表亏损本金的风险极低，适用于低风险偏好客户的资产配置需求，也体现了银行理财坚持为民投资理财的政治性和人民性的根本属性。

第三，基于底层资产的收益波动，银行理财产品均存在一定的期间跌破净值甚至0.98概率，混合类产品净值跌破1.0的概率明显高于固定收益类产品，但业绩基准更高，且期末达到业绩基准的概率更高，在银行理财产品中高风险高收益特征明显。

### 理财产品未来发展与建议

展望未来银行理财产品的发展趋势，我们认为应该从以下三个方面着手。

第一，理财产品发行方面，应做好固定收益类产品和混合类产品占比的管理工作，根据客户结构、风险偏好以及对经济形势、资产收益的分析判断，适度调整产品结构，合理设置业绩基准。例如债券收益率处于较高位置，应增加固定收益类产品发行占比，并适当降低业绩基准，降低客户未来收益预期，提高收益稳定性；而在股市处于相对低位时，则应增加混合类产品发行宣传力度，引导客户增加混合类产品的配置比例，以获取中长期更高的投资收益。银行依赖自身强大的投研资源，根据对宏观经济等进行研究分析，通过主动调整固定收益类产品和混合类产品的占比，调整客户总体资产配置比例，在产品发行端进行主动风险管理，为客户总体收益的稳定性提供良好的基础和保障，可以更好地体现金融的人民性和政治性。

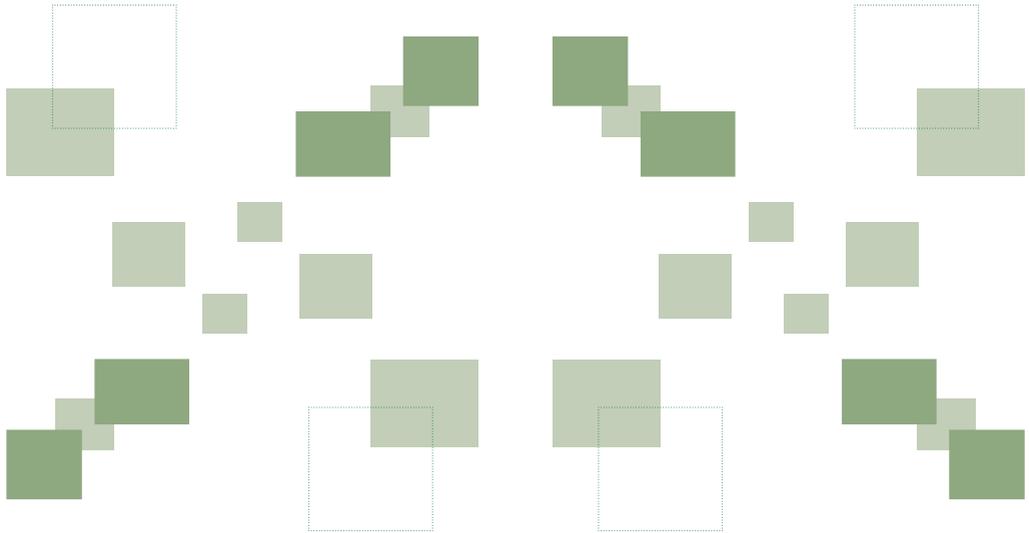
第二，理财产品投资管理方面，应该在努力实现提高业绩的基础上，提高低波动资产的配置比例，降低资产组合的波动率，降低产品净值回撤的风险，提高客户体验。例如，提高优先股等低波动优质资产占比，以及增加量化对冲套利策略的投资应用，提高投资组合的收益风险比，承担净值稳定器的作用。

第三，理财产品管理人应做好“了解

你的客户”（KYC）工作，坚持把合适的理财产品卖给合适的客户，做好投资者分级工作，并在产品存续期内与投资者持续沟通交流，引导投资者理解投资组合资产配置、业绩基准、净值波动等。例如，当股市出现调整时，包含权益资产的理财产品的净值回撤难以避免，应引导投资者理性对待短期净值的回撤，在更长的周期内

评价理财产品的业绩情况；当股市明显上涨时，应引导投资者降低对未来的投资收益预期，避免将短期的高收益当作常态，使投资者在更长的投资周期内保持健康的投资心态，有助于获得更高的理财投资收益。<sup>[N]</sup>

学术编辑：卢超群



参考文献：

- [1] 何声武.随机过程导论[M].北京:高等教育出版社,1999.
- [2] 林元烈.应用随机过程[M].北京:清华大学出版社,2002.
- [3] 银行业理财登记托管中心.中国银行业理财市场半年报告（2022年上）[R/OL].(2022-08-19)[2022-11-03].  
<https://www.chinawealth.com.cn/zzlc/newNotice/20220819/5803530.shtml>.
- [4] John C Hull.期权、期货及其他衍生产品（原书第10版）[M].王勇,索吾林,译.北京:机械工业出版社,2018.
- [5] Pranay Gupta,Sven R.Skallsj,Bing Li.多资产配置投资实践进阶[M].胡超,译.北京:机械工业出版社,2017.
- [6] Ross S M.Stochastic Processes[M].New Jersey:John Wiley & Sons,1993.