

“超预测”：蕴含动态因果系统的股债相关性研究（附录 3）

外审评议及作者回复

第一份意见

外审意见：

1. 图 1 “美国 S&P500 收益率和 7-10 期国债收益率相关系数”的表述存疑。国债收益率与 S&P500 股指收益率从计算方法上看不是对等的概念。S&P500 股指收益率是（期末-期初）/期初，可看作是价格变化率；而严格意义上讲，国债收益率是一个专有名词，指的是零息票债券的即期利率，或者也可不严格的说是国债利率，可参考例如：金融时报-2023-9-27-“本周一，美国长期国债收益率创下 10 多年新高：基准 10 年期美国国债收益率上升 0.10 个百分点，至 4.54%，为 16 年来的最高水平..”；上海证券报，2014-1-5 “10 年期国债收益率创近 4 年新低”；尚玉皇、张皓越-统计研究-2023-10 “国债收益率与高频宏观因子——基于非规则混频利率期限结构模型”。将股指变化率与利率变化放在一起度量和反映相关系数变化不妥。是不是应该指股票回报率与债券回报率的相关系数？从后文实证部分看，作者是计算了中债综合指数(7-10 年)的变化率。

2. “假设有 τ 期面值为 1 的零票息债券，那么该债券价格可以表示为式子（2），其中 B_t 为债券价格”，既然是 τ 期，那应该是 $B\tau$ ，后面的公式（3）（4）的表述也需要相应修改

3. 第 9 页，“除此之外，偏微分系数 $\frac{\partial S_{t+1}}{\partial S_t}$ 也在 2000 年左右发生显著转变”。公式有误，应该为 $\frac{\partial S_{t+1}}{\partial B_t}$ ；另外，4 个小图中的哪个图显示出在 2000 年左右显著转变？

4. 第 9 页作者写到“S-map 偏微分系数，其中 $\frac{\partial S_{t+1}}{\partial B_t}$ 和 $\frac{\partial B_{t+1}}{\partial S_t}$ 刻画了股票和债券之间的因果影响程度”。但后文第 10 页在研究因果强度对相关系数的影响时，即公式(16),为什么还引入 SS_t 和 BB_t ? 即 t 时刻的 $\frac{\partial S_t}{\partial S_{t-1}}$ 和 $\frac{\partial B_t}{\partial B_{t-1}}$ ， SS_t 和 BB_t 就是股对股，债对债，只是反映了自己前期值对本期值的影响，如何体现股债间的因果关系？

5. 第 12 页，（二）基于因果关系的资产配置。作者对比了采用传统替代法（模型 1）和本文提出的非线性方法（模型 2）的配置效果，从“图 8 是模型 1 和模型 2 的表现对比图，结果显示无论配置时间窗口是 1 年期还是 5 年期，使用基于 CauNN 模型预测的股债相关系数都能提升资产组合的夏普率”。从图上看相差不大（这还是纵轴设计尺度的背景下），建议给出实际数字的对比。如果用非线性的神经网络（CauNN）模型，提升 sharp-ratio 的幅度不大，但却降低运算和实际交易的处理速度，本文的实践意义有待提高。

6. 文章结构可以优化。引言部分第 2 页的有关理论推导部分和研究假设，建议放在第二部分，改成文献综述和研究假设。

作者回复：

尊敬的审稿老师，非常感谢您的宝贵建议。我们已经认真阅读并按照您的建议进行修订，期待得到您的认可。

1. 感谢您的建议，文中项表述的意思是“股票回报率与债券回报率的相关系数”，已按照您的建议进行修改。

2. 为避免歧义，已经修改为：

“假设有总期限为 τ 面值为 1 的零票息债券，那么 $t(t < \tau)$ 时刻该债券价格可以表示为式子 (2)，其中 B_t 为债券价格。”

$$B_t = \frac{1}{(1 + r_f)^{\tau-t}}$$

3. 观察图 7，可以推断 $\frac{\partial B_{t+1}}{\partial S_t}$ 、 $\frac{\partial S_{t+1}}{\partial B_t}$ 和 $\frac{\partial S_{t+1}}{\partial S_t}$ 均在 2000 年左右发生转变。

4. 引入 SS_t 和 BB_t 是为了引入更多的控制变量，我们也进行了不包含 SS_t 和 BB_t 的实证分析，实证结果是相似。

5. 原文已进行更新，给出了实际数字的对比。对比发现，尽管使用基于 CauNN 模型预测的股债相关系数能提升资产组合的夏普率，但提升效果并不显著，这是因为本文并没有进行波动率的预测，这也是影响组合表现的重要因素。

6. 已经在原文中修改。

第二份意见

外审意见：

本文的选题有较强的现实意义，研究股债相关性是国内外文献经典的研究话题，本文尝试从双向因果关系的视角对此问题再次进行研究，有一些新意。但是，实证研究过程还需要进一步完善，具体建议如下。

第一，实证逻辑还需要继续加强，为什么是 S&P500 和 7-10 年期债券综合指数，以及沪深 300 和 7-10 年期中债综合指数。这些样本选取的合理性需要详细说明。

第二，因果关系的资产配置的夏普比率具体计算情形需要详细说明。

第三，实证结果合理性和方法贡献需要加强。就是要求文章清晰地指出用本文所提出的方法比传统方法有什么新的贡献，以及这些新的贡献对资产配置和夏普比率的影响。关于股债相关性分析的文献非常多，本文的研究相比之下有什么新的贡献？文章既要体现学术价值，又要突出应用价值。

作者回复：

尊敬的审稿老师，非常感谢您的宝贵建议。我们已经认真阅读并按照您的建议进行修订，期待得到您的认可。

1. 本文主要参考 2021 年 JPM 期刊上 Czaronis 等人（2021）的研究数据，美国的股票市场采用 S&P500 指数，债券市场采用 7-10 年期债券综合指数。相似地，我们使用沪深 300 指数作为股票市场数据，使用中债综合指数（7-10 年）作为债券市场数据。已在文中做了补充说明。

2. 组合夏普率计算方法为 $SR_p = \frac{R_p - R_F}{\sigma_p}$ ，其中， R_p 为投资组合收益率， R_F 为无风险率， σ_p 为投资组合收益率的标准差。已在文章中更新。

3. （1）“用本文所提出的方法比传统方法有什么新的贡献？”

答：传统方法中最常用的格兰杰方法依赖于可分离性的假设，然而本文发现股票和债券并不满足该假设，两者在一个动力学系统中。因此本文使用 CCM 方法和 S-map 方法，该方法是打破原有假设下进行因果检测。

（2）“这些新的贡献对资产配置和夏普比率的影响？”

答：CCM 方法证明了股债存在因果性，S-map 方法量化了两者的因果强度。进一步的实证分析证明了因果关系是驱动相关系数变化的重要因素之一。因此，将因果强度引入股债相关系数的预测模型中，能够提升预测股债相关系数的准确度。相关系数的准确预测能够进一步提升股债配置的效率，提升配置模型的表现。

（3）“关于股债相关性分析的文献非常多，本文的研究相比之下有什么新的贡献？”

答：第一，股债相关性研究的工作，大多数是从宏观视角找到驱动相关性变化的因素，而本文是从因果视角看待这个问题。

第二，虽然有大量股债相关性和因果性的研究，但没有相关研究同时关注相关性与因果性之间的内在联系，本文的研究验证了因果性是驱动相关性的重要因素。

“超预测”：蕴含动态因果系统的股债相关性研究（附录 1）

股债定价模型及因果关系定性定量研究方法

为了深入了解股票和债券的底层关系，本文对股票和债券定价模型进一步剖析。股票价格可以表示为式（1），其中 S_t 为股票价格， CF_{t+i} 为现金流， r_f 和 ERP 分别表示无风险利率和股票风险溢价。假设有总期限为 τ 面值为1的零票息债券，那么 $t(t < \tau)$ 时刻该债券价格可以表示为式子（2），其中 B_t 为债券价格。联立式子（1）和（2），可以得到式子（3），式子中 $g(B_t, ERP)$ 表示包含 B_t 和 ERP 的多项式。式子（3）和（4）表明股票定价公式中包含债券价格；反之，股票价格也是债券价格的一部分。Sugihara et al.（2012）指出在动力系统理论中，如果时间序列变量来自同一个动力系统，那么它们就有因果联系。

$$S_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{CF_{t+i}}{(1 + r_f + ERP)^i} \quad (1)$$

$$B_t = \frac{1}{(1 + r_f)^{\tau-t}} \quad (2)$$

$$S_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{CF_{t+i}}{B_t^{-\frac{i}{\tau-t}} + ERP^i + g(B_t, ERP)} \quad (3)$$

$$B_t = f(S_t) \quad (4)$$

根据式子（3）和（4），本文提出假设 1：

H1：股票价格和债券价格来自同一个非线性动力学系统，即两者存在非线性因果关系。

（一）收敛交叉映射方法

考虑两个长度为 L 的原始时间序列 X 和 Y ，分别表示为 $\{X\}=\{X(1), X(2), \dots, X(L)\}$ 和 $\{Y\}=\{Y(1), Y(2), \dots, Y(L)\}$ 。CCM 因果关系检验的思想是如果时间序列 X 和 Y 同属于一个动态系统，即 X 和 Y 共享一个流形，那么 X 和 Y 就可以被认为存在因果关系。随时间的变化， X 和 Y 在共同空间内的运动轨迹代表 D 维的吸引子流形 M ，利用变量的滞后坐标分别创建 M 中 X 和 Y 的影子流形 M_X 和 M_Y ，因为变量 X 和 Y 在 M 中是动态耦合的，所以， M_X 和 M_Y 上的点在时间上是相互对应的；而当 L 长度增加，吸引子的轨迹被更多数据填充，使得用以估计 X 的 Y 的历史信息越多， Y 对 X 的估计也就越好，当二者的映射点越接近，因果影响也就越强。这就是 CCM 的关键——收敛性，是指预测值与观测值的相关系数会随着构建样本的时间序列长度 L 增长而增加，并在达到极值后保持平稳的性质。具体的算法过程如下所示。

收敛交叉映射是在相空间进行预测分析，所以在进行因果检验之前需要进行相空间重构。根据 Takens 提出的嵌入定理，本文构造 X 和 Y 的影子流行 M_X 和 M_Y 如下：

$$M_X: x(t) = \langle X(t), X(t - \tau), X(t - 2\tau), \dots, X(t - (E - 1)\tau) \rangle \quad (5)$$

$$M_Y: y(t) = \langle Y(t), Y(t - \tau), Y(t - 2\tau), \dots, Y(t - (E - 1)\tau) \rangle \quad (6)$$

其中, E 代表影子流行的维度, τ 代表时间滞后。以根据变量 X 预测变量 Y 为例说明, 在 M_X 上 t 时刻的滞后坐标向量为 $x(t)$, 根据 $x(t)$ 与其他时刻坐标向量的欧氏距离, 找到 $E + 1$ 个最近邻向量。根据向量间的距离, 得到每个向量对应的权重值 $w_1, \dots, w_{E+1}$ 。权重的计算方法为:

$$w_i = \frac{u_i}{\sum u_j} \quad j = 1, 2, \dots, E + 1 \quad (7)$$

$$u_i = \exp \{ -d[x(t), x(t_i)]/d[x(t), x(1)] \} \quad (8)$$

其中 $d[x(t), x(s)]$ 代表向量 $x(t)$ 与 $x(s)$ 之间的欧式距离。由于 M_X 和 M_Y 是微分同胚的, 因此可以将 M_X 中的近邻关系映射到 M_Y 中。那么, $y(t)$ 向量 $E + 1$ 个最优近邻向量可以被认为 $\{y(t_1), \dots, y(t_{E+1})\}$, 这些向量对应时间序列中的点为 $\{Y(t_1), \dots, Y(t_{E+1})\}$ 。基于交叉映射, $Y(t)$ 的预测值可以写为:

$$\hat{Y}(t)|M_X = \sum w_i Y(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, E + 1 \quad (9)$$

考虑到响应过程包含触发过程的全部信息, 构造交叉映射 $\hat{Y}(t)|M_X$ 的意义在于利用影子流行 M_X 估计时间序列 $Y(t)$ 以探究出发过程 Y 是否是响应过程 X 的原因。反之, 如果要考虑变量 X 是否是 Y 的原因, 则用 M_Y 估计 $X(t)$ 。

根据 Sugihara et al. (2012) 研究, 收敛交叉预测的预测能力通过计算真实值和估计值之间的 Pearson 相关系数来量化, 即

$$\rho_{Y|M_X} = \rho[Y(t), \hat{Y}(t)|M_X] \quad (10)$$

CCM 的收敛性表明如果变量之间存在因果关系, 那么使用的时间序列越长 (样本量越大), 所得到的交叉映射估计误差就会越小。这是因为时间序列越长, 绘制出来的流形 M 以及影子流形 M_X 和 M_Y 就会越 “稠密”, 此时某点的邻居点就会越 “紧凑”, 误差就会越小, Y 的真实值与交叉映射得到的估计值的相关系数也就会越高。当样本量足够大时, 这个相关系数就会趋于一个常数。

(二) 多变量 S-map 方法

S-map 方法是量化因果强度的一种有效手段 (Deyle et al., 2016), 被广泛应用在生物等领域 (Ushio et al., 2018)。假设系统共有 K 个变量, 那么 t 时刻的相空间向量为 $\{z(t) = \{z_1(t), \dots, z_K(t)\}\}$ 。在每一个目标时刻 t^* , S-map 使用相空间向量 $z(t^*)$, 通过线性模型预测 $t^* + p$ 时刻的值 $z_1(t^* + p)$, 即

$$\hat{z}_1(t^* + p) = C_0 + \sum_{j=1}^E C_j z_j(t^*) \quad (11)$$

该方法容易与向量自回归混淆, 然而两者有本质的区别。在 S-map 中, 不同样本被赋予不同的权重。在相空间与向量 $z(t^*)$ 的距离越小, 样本被赋予的权重越大; 与 $z(t^*)$ 的距离越大, 样本权重越小。因此, 将回归系数表达为 $B = A \cdot C$ 。若每个变量时间长度为 n , 那么 B 是一个 n 维的向量, 其中 B_i 为:

$$B_i = w(\|z(t_i) - z(t^*)\|) z_1(t_i + p) \quad (12)$$

$\mathbf{A}$ 是一个 $n \times K$ 的矩阵，矩阵元素为 $A_{ij} = (\|z(t_i) - z(t^*)\|)z_j(t_i)$ 。不同样本的权重定义为 $w(d) = \exp(-\frac{\theta d}{\bar{d}})$ ，其中 $\bar{d}$ 是 n 个样本的平均距离，即 $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|z(t_i) - z(t^*)\|$ 。

S-map 方法估计的因果强度是对每一时刻偏微分的近似，因此，可以将股票价格和债券价格的动态性表示为：

$$\hat{S}_{t+1} = \frac{\partial S_{t+1}}{\partial S_t} S_t + \frac{\partial S_{t+1}}{\partial B_t} B_t + C_0 \quad (13)$$

$$\hat{B}_{t+1} = \frac{\partial B_{t+1}}{\partial B_t} B_t + \frac{\partial B_{t+1}}{\partial S_t} S_t + C_1 \quad (14)$$

其中偏微分系数和截距项均由 S-map 方法计算得到。在使用 S-map 方法估计 t 时刻的因果强度时，本文使用窗口 $[t - 120, t - 1]$ 数据作为“Library Set”。

为了探究因果性与相关性之间的关联，本文首先对相关系数建立自回归模型，如公式(15)所示，作为对照模型。然后，本文将考虑因果强度对相关系数的影响，建立模型 (16)，如下所示。

$$Corr_t = C_0 + \alpha_6 Corr_{t-Len} + \varepsilon_t \quad (15)$$

$$Corr_t = C_0 + \alpha_1 SB_t + \alpha_2 BS_t + \alpha_3 SS_t + \alpha_4 BB_t + \alpha_5 Corr_{t-Len} + \varepsilon_t \quad (16)$$

其中， $Corr_t$ 表示股票和债券收益率在时间窗口 $[t, t+Len]$ 的相关系数， SB_t 、 BS_t 、 SS_t 和 BB_t 分别表示式中的偏微分系数，即 t 时刻的 $\frac{\partial S_t}{\partial B_{t-1}}$ 、 $\frac{\partial B_t}{\partial S_{t-1}}$ 、 $\frac{\partial S_t}{\partial S_{t-1}}$ 和 $\frac{\partial B_t}{\partial B_{t-1}}$ 。

“超预测”：蕴含动态因果系统的股债相关性研究（附录 2）

表 1 股债相关系数自回归

系数	Len=1y	Len=2y	Len=3y	Len=4y	Len=5y
con	-0.006	-0.038**	-0.058***	-0.071***	-0.079***
	-0.336	-2.413	-4.217	-5.144	-5.661
$Corr_{t-Len}$	0.417***	0.588***	0.655***	0.613***	0.571***
	9.953	15.435	18.374	16.377	14.556
Adj-R ²	0.177	0.348	0.437	0.388	0.340
F	99.07	238.2	337.6	268.2	211.9
样本量	458	446	434	422	410

注：***、**、*分别表示为 1%、5%、10%的显著性水平。

表 2 股债相关系数与因果强度

系数	Len=1y	Len=2y	Len=3y	Len=4y	Len=5y
con	-7.886***	0.494	2.789***	1.022	-0.450
	-4.703	0.416	2.987	1.206	-0.659
SB	1.813***	-0.928**	-1.704***	-1.310***	-1.110***
	3.973	-2.518	-6.146	-5.572	-5.859
BS	4.612**	-0.098	-4.406***	-4.277***	-3.390***
	2.450	-0.076	-4.551	-5.145	-5.262
SS	-1.013	-3.173***	-2.977***	-2.623***	-2.563***
	-1.957	-8.660	-11.183	-12.132	-15.500
BB	8.647***	2.409**	-0.083	1.296*	2.682***
	5.687	2.240	-0.096	1.624	4.108
$Corr_{t-Len}$	0.061	0.172***	0.221***	0.126***	0.058***
	1.359	4.421	7.066	4.595	2.658
Adj-R ²	0.429	0.638	0.783	0.843	0.903
F	69.53	157.8	312.9	452.6	761.3
样本量	458	446	434	422	410

注：***、**、*分别表示为 1%、5%、10%的显著性水平。

表 3 股债相关系数预测误差 MAE

	替代法	CorrOLS	CorrNN	CauOLS	CauNN
Len=1y	0.332	0.341	0.346	0.283	0.308
Len=2y	0.305	0.288	0.222	0.220	0.214
Len=3y	0.246	0.224	0.193	0.178	0.136
Len=4y	0.198	0.179	0.149	0.153	0.086
Len=5y	0.137	0.167	0.151	0.112	0.083

表 4 股债相关系数预测误差 MSE

	替代法	CorrOLS	CorrNN	CauOLS	CauNN
--	-----	---------	--------	--------	-------

Len=1y	0.187	0.155	0.158	0.125	0.131
Len=2y	0.145	0.122	0.082	0.091	0.069
Len=3y	0.092	0.077	0.062	0.061	0.026
Len=4y	0.058	0.055	0.040	0.042	0.011
Len=5y	0.035	0.046	0.040	0.024	0.010

资产配置模型如下所示：

$$\begin{aligned} \min w' \Sigma w \\ s.t. w_S + w_B = 1, w_S, w_B > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中， $w = [w_S, w_B]'$ 表示投资组合内股票和债券的持仓权重的列向量， Σ 表示股票和债券收益率的协方差矩阵。

表 5 模型 1 和模型 2 的夏普率对比

	模型 1	模型 2
Len=1y	1.424	1.431
Len=2y	1.326	1.374
Len=3y	1.366	1.385
Len=4y	1.299	1.316
Len=5y	1.255	1.284